36 李善蘭恆等式

我們都知道組合學上的符號

$$\binom{n}{j}=\binom{n}{n-j}=\frac{n!}{j!(n-j)!}$$

代表從 n 個相異的東西中選取 j 個的方法數。有了這個符號之後，很容易的可以將多項式 $(y+1)^n$ 展開成如下的式子

$$(y+1)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}y^j.$$

因為這樣的關係，我們經常從組合的方法數或者從多項式展開式的係數這兩種觀點來考慮組合學上的恆等式。這節的目的就是要證明中國數學家李善蘭在組合學上的一則恆等式。首先我們先證明一個引理。

引理 36.1(旺德蒙德恆等式)　設 n,m 為正整數且 $n\ge m\ge 1$。證明：

$$\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{j}\binom{m}{j}=\binom{n+m}{m}.$$

【組合證明】等式右邊代表 $n+m$ 個相異的東西選取 m 個的方法數。等式左邊這個和式的第 j 項 $\binom{n}{j}\binom{m}{j}=\binom{n}{j}\binom{m}{m-j}$ 代表從前面 n 個東西中選取 j 個，並從後面 m 個東西中選取 $m-j$ 個的方法數(總共也是選取 m 個)。從這組合的解釋剛好證明兩個式子必須相等。

【多項式證明】考慮式子

$$f(y)=(y+1)^m(y^{-1}+1)^n$$

展開式中常數項的係數。首先，因為 $(y+1)^m$ 展開式中 y^j 項的係數為 $\binom{m}{j}$；而 $(y^{-1}+1)^n$ 展開式中 y^{-j} 項的係數為 $\binom{n}{j}$，所以 $f(y)$ 的常數項係數為

$$\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{j}\binom{m}{j}.$$

另一方面，將多項式 $f(y)$ 化簡為

$$f(y)=(y+1)^m(y^{-1}+1)^n=y^m(y^{-1}+1)^{n+m}.$$

多項式 $f(y)$ 的常數項係數為

$$\binom{n+m}{m}.$$

因此我們得到

$$\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{j}\binom{m}{j}=\binom{n+m}{m}.$$

定理 36.1(李善蘭恆等式)　設 n,m 為正整數且 $n\ge m\ge 1$。證明：

$$\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}^2\binom{n+2m-j}{2m}=\binom{n+m}{m}^2.$$

【多項式證明】考慮式子

$$f(x,y)=(x+1)^{n+m}(x+1+y)^m(y^{-1}+1)^m$$

展開式中 x^{2m} 項的係數。

首先，因為 $(x+1)^{n+m}(x+1+y)^m$ 的展開式中 $x^{2m}y^j$ 項的係數為

$$\binom{m}{j}\binom{n+2m-j}{2m},$$

而 $(y^{-1}+1)^m$ 的展開式中 y^{-j} 項的係數為 $\binom{m}{j}$；所以 $f(x,y)$ 展開式中 x^{2m} 項的係數為

$$\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\binom{n+2m-j}{2m}\binom{m}{j}=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}^2\binom{n+2m-j}{2m}.$$

另一方面，因為

$$
\begin{aligned}
(x+1+y)^m(y^{-1}+1)^m &= \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}x^j(1+y)^{m-j}(y^{-1}+1)^m \\
&= \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}x^j y^{m-j}(y^{-1}+1)^{2m-j},
\end{aligned}
$$

所以 $(x+1+y)^m(y^{-1}+1)^m$ 展開式中 x^j 項的係數為 $\binom{m}{j}\binom{2m-j}{m-j}$。又 $(x+1)^{n+m}$ 展開式中 x^{2m-j} 項的係數為 $\binom{n+m}{2m-j}$，所以 $f(x,y)$ 的展開式中 x^{2m} 項的係數為

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\binom{2m-j}{m-j}\binom{n+m}{2m-j} &= \binom{n+m}{m}\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{m-j}\binom{m}{j} \\
&= \binom{n+m}{m}\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{m-j}\binom{m}{m-j} \\
&= \binom{n+m}{m}\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{j}\binom{m}{j} \\
&= \binom{n+m}{m}^2 \quad \text{(由旺德蒙德恆等式得到)}.
\end{aligned}
$$

由 $f(x,y)$ 的展開式中 x^{2m} 項的係數的兩種不同算法證得本定理。

關於李善蘭恆等式，如果有組合上的解釋，那一定很好。中國數學家華羅庚對這個恆等式給過一個數學歸納法的證明。

習題 36.1　在一圓上取相異的 n 個點，並連接這 n 個點所構成的弦。如果任意三條弦都不共點，則這些弦共有多少個交點。

習題 36.2　如果整數 r,n 滿足 $1\le r\le n$。證明：

$$\binom{r}{r}+\binom{r+1}{r}+\binom{r+2}{r}+\cdots+\binom{n}{r}=\binom{n+1}{r+1}.$$

習題 36.3　如果 n 是一個正整數，試問共有多少個數對 (a,b,c,d) 滿足

$$0\le a\le b\le c\le d\le n.$$

習題 36.4　證明恆等式

$$\binom{\binom{n}{2}}{2}=3\binom{n+1}{4},\quad n\ge 3,$$

並給此恆等式一個組合（或幾何）上的解釋。

動手玩數學

平面上任何不共線的 n 個相異點 $(n\ge 2)$，必可畫出一條直線恰通過其中的兩個點。

挑戰題

如果 p 是一個質數，n 是一個正整數且

$$\sqrt{1-\frac{1729}{p^n}}$$

是有理數，則求所有的數對 (p,n)。